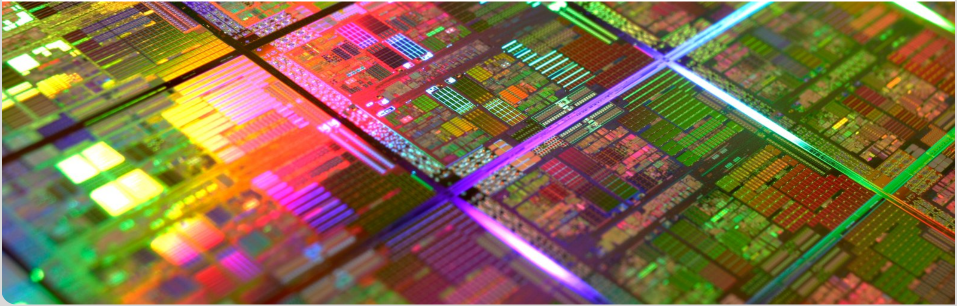
DuE-Tutorien 4 und 6

Tutorien zur Vorlesung “Digitaltechnik und Entwurfsverfahren”

Christian A. Mandery

WOCHE 3 AM 06.11.2012



Heute

- DNF und KNF
- Würfelkalkül
- Shannonscher Entwicklungssatz
- Übungsaufgaben

Definitionen

- Literal: Nicht-negierte oder negierte Boolesche Variable
- Produktterm: Konjunktion von Literalen, z.B. $a \wedge b$
- Sumterm: Disjunktion von Literalen, z.B. $a \vee b \vee c$
- Implikant (von f): Ein Produktterm, der f impliziert
- Implikat (von f): Ein Sumterm, der von f impliziert wird

Definitionen

- Literal: Nicht-negierte oder negierte Boolesche Variable
- Produktterm: Konjunktion von Literalen, z.B. $a \wedge b$
- Sumterm: Disjunktion von Literalen, z.B. $a \vee b \vee c$
- Implikant (von f): Ein Produktterm, der f impliziert
- Implikat (von f): Ein Sumterm, der von f impliziert wird

Definitionen

- Literal: Nicht-negierte oder negierte Boolesche Variable
- Produktterm: Konjunktion von Literalen, z.B. $a \wedge b$
- Sumterm: Disjunktion von Literalen, z.B. $a \vee b \vee c$
- Implikant (von f): Ein Produktterm, der f impliziert
- Implikat (von f): Ein Sumterm, der von f impliziert wird

Definitionen

- Literal: Nicht-negierte oder negierte Boolesche Variable
- Produktterm: Konjunktion von Literalen, z.B. $a \wedge b$
- Sumterm: Disjunktion von Literalen, z.B. $a \vee b \vee c$
- Implikant (von f): Ein Produktterm, der f impliziert
- Implikat (von f): Ein Sumterm, der von f impliziert wird

Definitionen

- Literal: Nicht-negierte oder negierte Boolesche Variable
- Produktterm: Konjunktion von Literalen, z.B. $a \wedge b$
- Sumterm: Disjunktion von Literalen, z.B. $a \vee b \vee c$
- Implikant (von f): Ein Produktterm, der f impliziert
- Implikat (von f): Ein Sumterm, der von f impliziert wird

Min- und Maxterme

- Minterm (von f):
  - Implikant, der jede Variable genau einmal enthält
  - $\rightarrow$ Eins-Zeilen der Funktionstabelle
- Maxterm (von f):
  - Implikat, der jede Variable genau einmal enthält
  - $\rightarrow$ Null-Zeilen der Funktionstabelle (mit negierten Variablen)

Min- und Maxterme

- Minterm (von f):
  - Implikant, der jede Variable genau einmal enthält
  - $\rightarrow$ Eins-Zeilen der Funktionstabelle
- Maxterm (von f):
  - Implikat, der jede Variable genau einmal enthält
  - $\rightarrow$ Null-Zeilen der Funktionstabelle (mit negierten Variablen)

Normalformen

- Disjunktive Normalform (DNF): Disjunktion aller Minterme von f, wobei keiner doppelt vorkommen darf
- Konjunktive Normalform (KNF): Konjunktion aller Maxterme von f, wobei keiner doppelt vorkommen darf
- Eigenschaften der Normalformen:
  - Sie sind eindeutig (bis auf Umordnung)
  - Jede Funktion kann durch algebraische Umformungen in die Normalformen gebracht werden
  - Min- und Maxterme kann man direkt an der Funktionstabelle ablesen, also auch die Normalformen

Normalformen

- Disjunktive Normalform (DNF): Disjunktion aller Minterme von f, wobei keiner doppelt vorkommen darf
- Konjunktive Normalform (KNF): Konjunktion aller Maxterme von f, wobei keiner doppelt vorkommen darf
- Eigenschaften der Normalformen:
  - Sie sind eindeutig (bis auf Umordnung)
  - Jede Funktion kann durch algebraische Umformungen in die Normalformen gebracht werden
  - Min- und Maxterme kann man direkt an der Funktionstabelle ablesen, also auch die Normalformen

Normalformen

- Disjunktive Normalform (DNF): Disjunktion aller Minterme von f, wobei keiner doppelt vorkommen darf
- Konjunktive Normalform (KNF): Konjunktion aller Maxterme von f, wobei keiner doppelt vorkommen darf
- Eigenschaften der Normalformen:
  - Sie sind eindeutig (bis auf Umordnung)
  - Jede Funktion kann durch algebraische Umformungen in die Normalformen gebracht werden
  - Min- und Maxterme kann man direkt an der Funktionstabelle ablesen, also auch die Normalformen

Normalformen

- Disjunktive Normalform (DNF): Disjunktion aller Minterme von f, wobei keiner doppelt vorkommen darf
- Konjunktive Normalform (KNF): Konjunktion aller Maxterme von f, wobei keiner doppelt vorkommen darf
- Eigenschaften der Normalformen:
  - Sie sind eindeutig (bis auf Umordnung)
  - Jede Funktion kann durch algebraische Umformungen in die Normalformen gebracht werden
  - Min- und Maxterme kann man direkt an der Funktionstabelle ablesen, also auch die Normalformen

Normalformen

- Disjunktive Normalform (DNF): Disjunktion aller Minterme von f, wobei keiner doppelt vorkommen darf
- Konjunktive Normalform (KNF): Konjunktion aller Maxterme von f, wobei keiner doppelt vorkommen darf
- Eigenschaften der Normalformen:
  - Sie sind eindeutig (bis auf Umordnung)
  - Jede Funktion kann durch algebraische Umformungen in die Normalformen gebracht werden
  - Min- und Maxterme kann man direkt an der Funktionstabelle ablesen, also auch die Normalformen

Beispiel

- Funktion: Antivalenz (XOR)
- Funktionstabelle:

x	y	$x \not\leftrightarrow y$	
0	0	0	$\rightarrow$ Maxterm: $x \vee y$
0	1	1	$\rightarrow$ Minterm: $\overline{x} \wedge y$
1	0	1	$\rightarrow$ Minterm: $x \wedge \overline{y}$
1	1	0	$\rightarrow$ Maxterm: $\overline{x} \vee \overline{y}$

- DNF: $(x \wedge \overline{y}) \vee (\overline{x} \wedge y)$
- KNF: $(x \vee y) \wedge (\overline{x} \vee \overline{y})$

Beispiel

- Funktion: Antivalenz (XOR)
- Funktionstabelle:

x	y	$x \nleftrightarrow y$	
0	0	0	$\rightarrow$ Maxterm: $x \vee y$
0	1	1	$\rightarrow$ Minterm: $\overline{x} \wedge y$
1	0	1	$\rightarrow$ Minterm: $x \wedge \overline{y}$
1	1	0	$\rightarrow$ Maxterm: $\overline{x} \vee \overline{y}$

- DNF: $(x \wedge \overline{y}) \vee (\overline{x} \wedge y)$
- KNF: $(x \vee y) \wedge (\overline{x} \vee \overline{y})$

Beispiel

- Funktion: Antivalenz (XOR)
- Funktionstabelle:

x	y	$x \nleftrightarrow y$	
0	0	0	$\rightarrow$ Maxterm: $x \vee y$
0	1	1	$\rightarrow$ Minterm: $\overline{x} \wedge y$
1	0	1	$\rightarrow$ Minterm: $x \wedge \overline{y}$
1	1	0	$\rightarrow$ Maxterm: $\overline{x} \vee \overline{y}$

- DNF: $(x \wedge \overline{y}) \vee (\overline{x} \wedge y)$
- KNF: $(x \vee y) \wedge (\overline{x} \vee \overline{y})$

Würfelkalkül

- Angabe eines Würfels ist die Angabe einer Variablenbelegung, wobei neben “0” und “1” auch “-” (“Don’t Care”) erlaubt ist
- Jeder Würfel repräsentiert einen entsprechenden Produktterm (Konjunktion von Literalen)
- Beispiele:
  - $f(c, b, a) = c \land \overline{b} \land a \leftrightarrow$ Würfel (1, 0, 1)
  - $f(c, b, a) = \overline{c} \land a \leftrightarrow$ Würfel (0, -, 1)
  - $f(c, b, a) = 1 \leftrightarrow$ Würfel (-, -, -)
- Ein Würfel mit n “Don’t Cares” überdeckt 2^n Variablenbelegungen (einfache Kombinatorik)

Würfelkalkül

- Angabe eines Würfels ist die Angabe einer Variablenbelegung, wobei neben “0” und “1” auch “-” (“Don’t Care”) erlaubt ist
- Jeder Würfel repräsentiert einen entsprechenden Produktterm (Konjunktion von Literalen)
- Beispiele:
  - $f(c, b, a) = c \wedge \overline{b} \wedge a \leftrightarrow$ Würfel (1, 0, 1)
  - $f(c, b, a) = \overline{c} \wedge a \leftrightarrow$ Würfel (0, -, 1)
  - $f(c, b, a) = 1 \leftrightarrow$ Würfel (-, -, -)
- Ein Würfel mit n “Don’t Cares” überdeckt 2^n Variablenbelegungen (einfache Kombinatorik)

Würfelkalkül

- Angabe eines Würfels ist die Angabe einer Variablenbelegung, wobei neben “0” und “1” auch “-” (“Don’t Care”) erlaubt ist
- Jeder Würfel repräsentiert einen entsprechenden Produktterm (Konjunktion von Literalen)
- Beispiele:
  - $f(c, b, a) = c \wedge \overline{b} \wedge a \leftrightarrow$ Würfel (1, 0, 1)
  - $f(c, b, a) = \overline{c} \wedge a \leftrightarrow$ Würfel (0, -, 1)
  - $f(c, b, a) = 1 \leftrightarrow$ Würfel (-, -, -)
- Ein Würfel mit n “Don’t Cares” überdeckt 2^n Variablenbelegungen (einfache Kombinatorik)

Veranschaulichung

- Name “Würfelkalkül” wegen der grafischen Veranschaulichung des Raums der möglichen Variablenbelegungen
  - Zwei Variablen: 2D-Würfel = Quadrat (4 mgl. Variablenbelegungen)
  - Drei Variablen: 3D-Würfel (8 mgl. Variablenbelegungen)
  - k Variablen: Hyperwürfel (2^k mgl. Variablenbelegungen)

Überdeckung

- Würfel A überdeckt B, wenn für alle Variablen i gilt:
  - $A_i = B_i$ oder
  - $A_i =$ "-" ("Don't Care")
- Interpretation: Würfel A enthält alle Variablenbelegungen, die in Würfel B enthalten sind (und weitere, falls $A \neq B$)

Überdeckung

- Würfel A überdeckt B, wenn für alle Variablen i gilt:
  - $A_i = B_i$ oder
  - A_i = “-” (“Don’t Care”)
- Interpretation: Würfel A enthält alle Variablenbelegungen, die in Würfel B enthalten sind (und weitere, falls $A \neq B$)

Schnittmenge zweier Würfel

- Wird später für die Bildung von Consensus-Würfeln für das Consensus-Verfahren benötigt
- Nur definiert, wenn sich die Würfel nicht widersprechen, also gilt $\nexists i : (A_i = 1 \wedge B_i = 0) \vee (A_i = 0 \wedge B_i = 1)$
- Mögliche Fälle dann bei der Schnittmenge:
  - $A_i = 1$ oder $B_i = 1$: $\rightarrow 1$
  - $A_i = 0$ oder $B_i = 0$: $\rightarrow 0$
  - $A_i =$ "-" und $B_i =$ "-": $\rightarrow$ "-" ("Don't Care")

Schnittmenge zweier Würfel

- Wird später für die Bildung von Consensus-Würfeln für das Consensus-Verfahren benötigt
- Nur definiert, wenn sich die Würfel nicht widersprechen, also gilt $\nexists i : (A_i = 1 \wedge B_i = 0) \vee (A_i = 0 \wedge B_i = 1)$
- Mögliche Fälle dann bei der Schnittmenge:
  - $A_i = 1$ oder $B_i = 1$: $\rightarrow 1$
  - $A_i = 0$ oder $B_i = 0$: $\rightarrow 0$
  - $A_i =$ "-" und $B_i =$ "-": $\rightarrow$ "-" ("Don't Care")

Shannonscher Entwicklungssatz

Karlsruher Institut für Technologie

- Erlaubt es, jede beliebige Funktion schaltalgebraisch in die DNF oder KNF zu überführen
- Disjunktive Regel:
  $f(x_n, ...x_1) =$
  $(x_i \wedge f(x_n, ..., x_{i+1}, 1, x_{i-1}, ..., x_1)) \vee (\overline{x_i} \wedge f(x_n, ..., x_{i+1}, 0, x_{i-1}, ..., x_1))$
- Konjunktive Regel:
  $f(x_n, ...x_1) =$
  $(x_i \vee f(x_n, ..., x_{i+1}, 0, x_{i-1}, ..., x_1)) \wedge (\overline{x_i} \vee f(x_n, ..., x_{i+1}, 1, x_{i-1}, ..., x_1))$
- Enge Verbindung zu Multiplexern

Shannonscher Entwicklungssatz

- Erlaubt es, jede beliebige Funktion schaltalgebraisch in die DNF oder KNF zu überführen
- Disjunktive Regel:
  $f(x_n, ...x_1) =$
  $(x_i \wedge f(x_n, ..., x_{i+1}, 1, x_{i-1}, ..., x_1)) \vee (\overline{x_i} \wedge f(x_n, ..., x_{i+1}, 0, x_{i-1}, ..., x_1))$
- Konjunktive Regel:
  $f(x_n, ...x_1) =$
  $(x_i \vee f(x_n, ..., x_{i+1}, 0, x_{i-1}, ..., x_1)) \wedge (\overline{x_i} \vee f(x_n, ..., x_{i+1}, 1, x_{i-1}, ..., x_1))$
- Enge Verbindung zu Multiplexern

Shannonscher Entwicklungssatz

- Erlaubt es, jede beliebige Funktion schaltalgebraisch in die DNF oder KNF zu überführen
- Disjunktive Regel:
  $f(x_n, ...x_1) =$
  $(x_i \wedge f(x_n, ..., x_{i+1}, 1, x_{i-1}, ..., x_1)) \vee (\overline{x_i} \wedge f(x_n, ..., x_{i+1}, 0, x_{i-1}, ..., x_1))$
- Konjunktive Regel:
  $f(x_n, ...x_1) =$
  $(x_i \vee f(x_n, ..., x_{i+1}, 0, x_{i-1}, ..., x_1)) \wedge (\overline{x_i} \vee f(x_n, ..., x_{i+1}, 1, x_{i-1}, ..., x_1))$
- Enge Verbindung zu Multiplexern

Shannonscher Entwicklungssatz

- Erlaubt es, jede beliebige Funktion schaltalgebraisch in die DNF oder KNF zu überführen
- Disjunktive Regel:
  $f(x_n, ...x_1) =$
  $(x_i \wedge f(x_n, ..., x_{i+1}, 1, x_{i-1}, ..., x_1)) \vee (\overline{x_i} \wedge f(x_n, ..., x_{i+1}, 0, x_{i-1}, ..., x_1))$
- Konjunktive Regel:
  $f(x_n, ...x_1) =$
  $(x_i \vee f(x_n, ..., x_{i+1}, 0, x_{i-1}, ..., x_1)) \wedge (\overline{x_i} \vee f(x_n, ..., x_{i+1}, 1, x_{i-1}, ..., x_1))$
- Enge Verbindung zu Multiplexern

Übungsaufgabe 1.1

Vereinfachen Sie die folgenden Booleschen Ausdrücke so weit wie möglich:

1. $(a \nleftrightarrow (b \nleftrightarrow (a \wedge b)))$
2. $(a \leftrightarrow b) \vee b \vee (b \nleftrightarrow a)$
3. $abc \vee \overline{a}bc \vee ab\overline{c} \vee \overline{a}b\overline{c}$
4. $x \vee xyz \vee yz\overline{x} \vee qx \vee \overline{q}x \vee \overline{x}y$

Übungsaufgabe 1.1

Vereinfachen Sie die folgenden Booleschen Ausdrücke so weit wie möglich:

1. $(a \nleftrightarrow (b \nleftrightarrow (a \wedge b)))$
2. $(a \leftrightarrow b) \vee b \vee (b \nleftrightarrow a)$
3. $abc \vee \overline{a}bc \vee ab\overline{c} \vee \overline{a}b\overline{c}$
4. $x \vee xyz \vee yz\overline{x} \vee qx \vee \overline{q}x \vee \overline{x}y$

Übungsaufgabe 1.1

Vereinfachen Sie die folgenden Booleschen Ausdrücke so weit wie möglich:

1. $(a \nleftrightarrow (b \nleftrightarrow (a \wedge b)))$
2. $(a \leftrightarrow b) \vee b \vee (b \nleftrightarrow a)$
3. $abc \vee \overline{a}bc \vee ab\overline{c} \vee \overline{a}b\overline{c}$
4. $x \vee xyz \vee yz\overline{x} \vee qx \vee \overline{q}x \vee \overline{x}y$

Übungsaufgabe 1.1

Vereinfachen Sie die folgenden Booleschen Ausdrücke so weit wie möglich:

1. $(a \nleftrightarrow (b \nleftrightarrow (a \wedge b)))$
2. $(a \leftrightarrow b) \vee b \vee (b \nleftrightarrow a)$
3. $abc \vee \overline{a}bc \vee ab\overline{c} \vee \overline{a}b\overline{c}$
4. $x \vee xyz \vee yz\overline{x} \vee qx \vee \overline{q}x \vee \overline{x}y$

Übungsaufgabe 1.2

Untersuchen Sie mit Hilfe einer Wahrheitstabelle, ob die folgenden Aussagen A_1 und A_2 äquivalent sind:

- A_1: $(((a \leftrightarrow b) \vee c) \nleftrightarrow b) \wedge c)$
- A_2: $\overline{b} \wedge c$

Übungsaufgabe 1.3

Welches Gesetz des Schaltalgebra gestattet die folgende Umformung?

$$[(a \wedge b) \vee b] \wedge [(a \wedge b) \vee c] = (a \wedge b) \vee (b \wedge c)$$

Übungsaufgabe 2

Gegeben sei die Boolesche Funktion $f(c, b, a) = MINt(1, 2, 3, 6, 7)$

1. Stellen Sie die Funktionstabelle der Funktionen $f(c, b, a)$ und $\overline{f}(c, b, a)$ auf.
2. Geben Sie die konjunktive Normalform (KNF) der Funktionen f und $\overline{f}$ an.
3. Geben Sie die disjunktive Normalform (DNF) von $\overline{f}$ an.
4. Vereinfachen Sie die Ausdrücke der DNF und KNF von f mit Hilfe der Regeln der Booleschen Algebra. Die resultierenden Ausdrücke sollen so wenig Literale wie möglich enthalten.

Übungsaufgabe 2

Gegeben sei die Boolesche Funktion $f(c, b, a) = MINt(1, 2, 3, 6, 7)$

1. Stellen Sie die Funktionstabelle der Funktionen $f(c, b, a)$ und $\overline{f}(c, b, a)$ auf.
2. Geben Sie die konjunktive Normalform (KNF) der Funktionen f und $\overline{f}$ an.
3. Geben Sie die disjunktive Normalform (DNF) von $\overline{f}$ an.
4. Vereinfachen Sie die Ausdrücke der DNF und KNF von f mit Hilfe der Regeln der Booleschen Algebra. Die resultierenden Ausdrücke sollen so wenig Literale wie möglich enthalten.

Übungsaufgabe 2

Gegeben sei die Boolesche Funktion $f(c, b, a) = MINt(1, 2, 3, 6, 7)$

1. Stellen Sie die Funktionstabelle der Funktionen $f(c, b, a)$ und $\overline{f}(c, b, a)$ auf.
2. Geben Sie die konjunktive Normalform (KNF) der Funktionen f und $\overline{f}$ an.
3. Geben Sie die disjunktive Normalform (DNF) von $\overline{f}$ an.
4. Vereinfachen Sie die Ausdrücke der DNF und KNF von f mit Hilfe der Regeln der Booleschen Algebra. Die resultierenden Ausdrücke sollen so wenig Literale wie möglich enthalten.

Übungsaufgabe 2

Gegeben sei die Boolesche Funktion $f(c, b, a) = MINt(1, 2, 3, 6, 7)$

1. Stellen Sie die Funktionstabelle der Funktionen $f(c, b, a)$ und $\overline{f}(c, b, a)$ auf.
2. Geben Sie die konjunktive Normalform (KNF) der Funktionen f und $\overline{f}$ an.
3. Geben Sie die disjunktive Normalform (DNF) von $\overline{f}$ an.
4. Vereinfachen Sie die Ausdrücke der DNF und KNF von f mit Hilfe der Regeln der Booleschen Algebra. Die resultierenden Ausdrücke sollen so wenig Literale wie möglich enthalten.

Übungsaufgabe 3

Gegeben sei die Schaltfunktion $f(w, x, y, z)$:

$f(w, x, y, z) = w(xz \vee y\overline{z}) \vee x(\overline{w}y \vee z) \vee \overline{w}y\overline{z}$

1. Bestimmen Sie die konjunktive Normalform (KNF) und die disjunktive Normalform (DNF) von f.
2. Bestimmen Sie die zur DNF von f gehörigen Würfel gemäß dem Würfelkalkül.
3. Welche dieser Würfel können zusammengefasst werden?

Übungsaufgabe 3

Gegeben sei die Schaltfunktion $f(w, x, y, z)$:

$f(w, x, y, z) = w(xz \vee y\overline{z}) \vee x(\overline{w}y \vee z) \vee \overline{w}y\overline{z}$

1. Bestimmen Sie die konjunktive Normalform (KNF) und die disjunktive Normalform (DNF) von f.
2. Bestimmen Sie die zur DNF von f gehörigen Würfel gemäß dem Würfelkalkül.
3. Welche dieser Würfel können zusammengefasst werden?

Übungsaufgabe 3

Gegeben sei die Schaltfunktion $f(w, x, y, z)$:

$f(w, x, y, z) = w(xz \vee y\overline{z}) \vee x(\overline{w}y \vee z) \vee \overline{w}y\overline{z}$

1. Bestimmen Sie die konjunktive Normalform (KNF) und die disjunktive Normalform (DNF) von f.
2. Bestimmen Sie die zur DNF von f gehörigen Würfel gemäß dem Würfelkalkül.
3. Welche dieser Würfel können zusammengefasst werden?

Übungsaufgabe 4

Gegeben sei die Boolesche Funktion

$$y = f(d, c, b, a) = c\overline{b}a \vee dcb \vee dc\overline{b} \vee \overline{c}\,\overline{b}a$$

1. Vereinfachen Sie den Ausdruck der obigen Funktion.
2. Stellen Sie die Funktionstabelle der Funktion y auf.
3. Geben Sie sowohl die disjunktive Normalform (DNF) als auch die konjunktive Normalform (KNF) von y an.

Übungsaufgabe 4

Gegeben sei die Boolesche Funktion

$$y = f(d, c, b, a) = c\overline{b}a \vee dcb \vee dc\overline{b} \vee \overline{c}\overline{b}a$$

1. Vereinfachen Sie den Ausdruck der obigen Funktion.
2. Stellen Sie die Funktionstabelle der Funktion y auf.
3. Geben Sie sowohl die disjunktive Normalform (DNF) als auch die konjunktive Normalform (KNF) von y an.

Übungsaufgabe 4

Gegeben sei die Boolesche Funktion

$y = f(d, c, b, a) = c\overline{b}a \vee dcb \vee dc\overline{b} \vee \overline{c}\,\overline{b}a$

1. Vereinfachen Sie den Ausdruck der obigen Funktion.
2. Stellen Sie die Funktionstabelle der Funktion y auf.
3. Geben Sie sowohl die disjunktive Normalform (DNF) als auch die konjunktive Normalform (KNF) von y an.

Fertig!

Quelle: http://xkcd.com/676/