

DuE-Tutorien 17 und 18

Tutorien zur Vorlesung "Digitaltechnik und Entwurfsverfahren"

Christian A. Mandery

TUTORIENWOCHE 7 AM 16.12.2011



- Quine-McClusky-Verfahren
- Consensus-Verfahren
- Übungsaufgaben

- Systematisches Minimierungsverfahren
- Grundidee: Terme zusammenfassen, die in (genau) einer Variable komplementär belegt sind (analog zum KV-Diagramm)
- Zwei Schritte:
 - 1 Ermittlung aller Primimplikanten (\rightarrow 1. Quinesche Tabelle)
 - 2 Auswahl der zu verwendenden Primimplikanten (\rightarrow 2. Quinesche Tabelle alias Überdeckungstabelle)
- Schritte können auch “einzeln” verwendet werden, z.B.:
Ermittlung der Primimplikanten mittels KV-Diagramm, dann 2. Quinesche Tabelle zur Auswahl von Primimplikanten

- Systematisches Minimierungsverfahren
- Grundidee: Terme zusammenfassen, die in (genau) einer Variable komplementär belegt sind (analog zum KV-Diagramm)
- Zwei Schritte:
 - ① Ermittlung aller Primimplikanten (\rightarrow 1. Quinesche Tabelle)
 - ② Auswahl der zu verwendenden Primimplikanten (\rightarrow 2. Quinesche Tabelle alias Überdeckungstabelle)
- Schritte können auch “einzeln” verwendet werden, z.B.:
Ermittlung der Primimplikanten mittels KV-Diagramm, dann 2. Quinesche Tabelle zur Auswahl von Primimplikanten

- Systematisches Minimierungsverfahren
- Grundidee: Terme zusammenfassen, die in (genau) einer Variable komplementär belegt sind (analog zum KV-Diagramm)
- Zwei Schritte:
 - 1 Ermittlung aller Primimplikanten (\rightarrow 1. Quinesche Tabelle)
 - 2 Auswahl der zu verwendenden Primimplikanten (\rightarrow 2. Quinesche Tabelle alias Überdeckungstabelle)
- Schritte können auch “einzeln” verwendet werden, z.B.:
Ermittlung der Primimplikanten mittels KV-Diagramm, dann 2. Quinesche Tabelle zur Auswahl von Primimplikanten

- Systematisches Minimierungsverfahren
- Grundidee: Terme zusammenfassen, die in (genau) einer Variable komplementär belegt sind (analog zum KV-Diagramm)
- Zwei Schritte:
 - ① Ermittlung aller Primimplikanten (\rightarrow 1. Quinesche Tabelle)
 - ② Auswahl der zu verwendenden Primimplikanten (\rightarrow 2. Quinesche Tabelle alias Überdeckungstabelle)
- Schritte können auch “einzeln” verwendet werden, z.B.:
Ermittlung der Primimplikanten mittels KV-Diagramm, dann 2. Quinesche Tabelle zur Auswahl von Primimplikanten

- Dient zur Bestimmung aller Primimplikanten einer Funktion
- Iteratives Verfahren, das in jedem Schritt eine neue Tabelle höherer Ordnung (mehr “Don’t Cares”) erzeugt
- Zusammengefasste Primterme werden gestrichen bzw. abgehakt
- Verfahren terminiert, wenn sich keine Änderungen mehr ergeben, also spätestens bei der Tabelle n-ter Ordnung (nur noch “Don’t Cares”)

1. Quinesche Tabelle

- Dient zur Bestimmung aller Primimplikanten einer Funktion
- Iteratives Verfahren, das in jedem Schritt eine neue Tabelle höherer Ordnung (mehr “Don’t Cares”) erzeugt
- Zusammengefasste Primterme werden gestrichen bzw. abgehakt
- Verfahren terminiert, wenn sich keine Änderungen mehr ergeben, also spätestens bei der Tabelle n-ter Ordnung (nur noch “Don’t Cares”)

1. Quinesche Tabelle

- Dient zur Bestimmung aller Primimplikanten einer Funktion
- Iteratives Verfahren, das in jedem Schritt eine neue Tabelle höherer Ordnung (mehr “Don’t Cares”) erzeugt
- Zusammengefasste Primterme werden gestrichen bzw. abgehakt
- Verfahren terminiert, wenn sich keine Änderungen mehr ergeben, also spätestens bei der Tabelle n-ter Ordnung (nur noch “Don’t Cares”)

1. Quinesche Tabelle

- Dient zur Bestimmung aller Primimplikanten einer Funktion
- Iteratives Verfahren, das in jedem Schritt eine neue Tabelle höherer Ordnung (mehr “Don’t Cares”) erzeugt
- Zusammengefasste Primterme werden gestrichen bzw. abgehakt
- Verfahren terminiert, wenn sich keine Änderungen mehr ergeben, also spätestens bei der Tabelle n-ter Ordnung (nur noch “Don’t Cares”)

- Initialisierung (Quinesche Tabelle nullter Ordnung):
 - Schreibe alle Minterme in eine Tabelle
 - Sortiert nach der Anzahl der nicht-negierten (positiven) Literale
 - Trenne die Bereiche unterschiedlicher Anzahl nicht-negierter Literale voneinander ab
- n-ter Iterationsschritt (Quinesche Tabelle n-ter Ordnung):
 - Schreibe zusammenfassbare Terme aus der Tabelle (n-1)-ter Ordnung in die neue Tabelle
 - Von oben nach unten vorgehen: Sortierung bleibt automatisch erhalten
 - Zusammengefasste Terme werden abgehakt, mit abgehakten Termen muss aber weiterhin verglichen werden!
- Vorteil: Im Iterationsschritt müssen zusammenfassbare Terme nur in benachbarten Sektionen der Tabelle gesucht werden
 - Ansonsten: Terme müssen sich in mehr als einer Variable unterscheiden → Sind nicht zusammenfassbar

- Initialisierung (Quinesche Tabelle nullter Ordnung):
 - Schreibe alle Minterme in eine Tabelle
 - Sortiert nach der Anzahl der nicht-negierten (positiven) Literale
 - Trenne die Bereiche unterschiedlicher Anzahl nicht-negierter Literale voneinander ab
- n-ter Iterationsschritt (Quinesche Tabelle n-ter Ordnung):
 - Schreibe zusammenfassbare Terme aus der Tabelle (n-1)-ter Ordnung in die neue Tabelle
 - Von oben nach unten vorgehen: Sortierung bleibt automatisch erhalten
 - Zusammengefasste Terme werden abgehakt, mit abgehakten Termen muss aber weiterhin verglichen werden!
- Vorteil: Im Iterationsschritt müssen zusammenfassbare Terme nur in benachbarten Sektionen der Tabelle gesucht werden
 - Ansonsten: Terme müssen sich in mehr als einer Variable unterscheiden → Sind nicht zusammenfassbar

- Initialisierung (Quinesche Tabelle nullter Ordnung):
 - Schreibe alle Minterme in eine Tabelle
 - Sortiert nach der Anzahl der nicht-negierten (positiven) Literale
 - Trenne die Bereiche unterschiedlicher Anzahl nicht-negierter Literale voneinander ab
- n-ter Iterationsschritt (Quinesche Tabelle n-ter Ordnung):
 - Schreibe zusammenfassbare Terme aus der Tabelle (n-1)-ter Ordnung in die neue Tabelle
 - Von oben nach unten vorgehen: Sortierung bleibt automatisch erhalten
 - Zusammengefasste Terme werden abgehakt, mit abgehakten Termen muss aber weiterhin verglichen werden!
- Vorteil: Im Iterationsschritt müssen zusammenfassbare Terme nur in benachbarten Sektionen der Tabelle gesucht werden
 - Ansonsten: Terme müssen sich in mehr als einer Variable unterscheiden → Sind nicht zusammenfassbar

2. Quinesche Tabelle

- Dient zur Bestimmung einer minimalen Überdeckung bei bekannten Primimplikanten
- Vorgehensweise:
 - Zeichne Tabelle: Zeilen = Primimplikanten, Spalten = Minterme
 - X dort, wo der Primimplikant den entsprechenden Minterm überdeckt
 - Anwendung von Regeln, dann Angabe der Überdeckungsfunktion (s. nächste Folie)
- Vereinfachungsregeln:
 - Erster Schritt: Streiche die Zeilen der Kernprimimplikanten und ihre überdeckten Minterme
 - Spaltendominanz: Überdeckt eine Spalte eine andere, streiche erstgenannte
 - Zeilendominanz: Überdeckt eine Zeile eine andere mit höheren oder gleichen Kosten, streiche die überdeckte Zeile
- Diskussion: Warum gelten diese Regeln?

2. Quinesche Tabelle

- Dient zur Bestimmung einer minimalen Überdeckung bei bekannten Primimplikanten
- Vorgehensweise:
 - Zeichne Tabelle: Zeilen = Primimplikanten, Spalten = Minterme
 - X dort, wo der Primimplikant den entsprechenden Minterm überdeckt
 - Anwendung von Regeln, dann Angabe der Überdeckungsfunktion (s. nächste Folie)
- Vereinfachungsregeln:
 - Erster Schritt: Streiche die Zeilen der Kernprimimplikanten und ihre überdeckten Minterme
 - Spaltendominanz: Überdeckt eine Spalte eine andere, streiche erstgenannte
 - Zeilendominanz: Überdeckt eine Zeile eine andere mit höheren oder gleichen Kosten, streiche die überdeckte Zeile
- Diskussion: Warum gelten diese Regeln?

2. Quinesche Tabelle

- Dient zur Bestimmung einer minimalen Überdeckung bei bekannten Primimplikanten
- Vorgehensweise:
 - Zeichne Tabelle: Zeilen = Primimplikanten, Spalten = Minterme
 - X dort, wo der Primimplikant den entsprechenden Minterm überdeckt
 - Anwendung von Regeln, dann Angabe der Überdeckungsfunktion (s. nächste Folie)
- Vereinfachungsregeln:
 - Erster Schritt: Streiche die Zeilen der Kernprimimplikanten und ihre überdeckten Minterme
 - Spaltendominanz: Überdeckt eine Spalte eine andere, streiche erstgenannte
 - Zeilendominanz: Überdeckt eine Zeile eine andere mit höheren oder gleichen Kosten, streiche die überdeckte Zeile
- Diskussion: Warum gelten diese Regeln?

2. Quinesche Tabelle

- Dient zur Bestimmung einer minimalen Überdeckung bei bekannten Primimplikanten
- Vorgehensweise:
 - Zeichne Tabelle: Zeilen = Primimplikanten, Spalten = Minterme
 - X dort, wo der Primimplikant den entsprechenden Minterm überdeckt
 - Anwendung von Regeln, dann Angabe der Überdeckungsfunktion (s. nächste Folie)
- Vereinfachungsregeln:
 - Erster Schritt: Streiche die Zeilen der Kernprimimplikanten und ihre überdeckten Minterme
 - Spaltendominanz: Überdeckt eine Spalte eine andere, streiche erstgenannte
 - Zeilendominanz: Überdeckt eine Zeile eine andere mit höheren oder gleichen Kosten, streiche die überdeckte Zeile
- Diskussion: Warum gelten diese Regeln?

2. Quinesche Tabelle

- Dient zur Bestimmung einer minimalen Überdeckung bei bekannten Primimplikanten
- Vorgehensweise:
 - Zeichne Tabelle: Zeilen = Primimplikanten, Spalten = Minterme
 - X dort, wo der Primimplikant den entsprechenden Minterm überdeckt
 - Anwendung von Regeln, dann Angabe der Überdeckungsfunktion (s. nächste Folie)
- Vereinfachungsregeln:
 - Erster Schritt: Streiche die Zeilen der Kernprimimplikanten und ihre überdeckten Minterme
 - Spaltendominanz: Überdeckt eine Spalte eine andere, streiche erstgenannte
 - Zeilendominanz: Überdeckt eine Zeile eine andere mit höheren oder gleichen Kosten, streiche die überdeckte Zeile
- Diskussion: Warum gelten diese Regeln?

2. Quinesche Tabelle

- Dient zur Bestimmung einer minimalen Überdeckung bei bekannten Primimplikanten
- Vorgehensweise:
 - Zeichne Tabelle: Zeilen = Primimplikanten, Spalten = Minterme
 - X dort, wo der Primimplikant den entsprechenden Minterm überdeckt
 - Anwendung von Regeln, dann Angabe der Überdeckungsfunktion (s. nächste Folie)
- Vereinfachungsregeln:
 - Erster Schritt: Streiche die Zeilen der Kernprimimplikanten und ihre überdeckten Minterme
 - Spaltendominanz: Überdeckt eine Spalte eine andere, streiche erstgenannte
 - Zeilendominanz: Überdeckt eine Zeile eine andere mit höheren oder gleichen Kosten, streiche die überdeckte Zeile
- Diskussion: Warum gelten diese Regeln?

2. Quinesche Tabelle

Wie kommt man von der (vereinfachten) 2. Quineschen Tabelle zur Minimalform?

- Durch “scharfes Hinsehen”
- Oder systematisch:
 - Überdeckungsfunktion verwendet Variablen w_X
 - w_X gibt an, ob der Primimplikant X in der Minimalform vorkommt
 - Aufbau:
 - Für jeden Minterm gibt es eine oder mehrere überdeckende Primimplikanten, von denen ein beliebiger reicht \rightarrow Disjunktion der w_X
 - Es müssen alle Minterme überdeckt werden \rightarrow Konjunktion der Terme
 - \rightarrow Überdeckungsfunktion: Konjunktion der Disjunktion der w_X für jeden Minterm
 - Überdeckungsfunktion wird anschließend vereinfacht

2. Quinesche Tabelle

Wie kommt man von der (vereinfachten) 2. Quineschen Tabelle zur Minimalform?

- Durch “scharfes Hinsehen”
- Oder systematisch:
 - Überdeckungsfunktion verwendet Variablen w_X
 - w_X gibt an, ob der Primimplikant X in der Minimalform vorkommt
 - Aufbau:
 - Für jeden Minterm gibt es eine oder mehrere überdeckende Primimplikanten, von denen ein beliebiger reicht \rightarrow Disjunktion der w_X
 - Es müssen alle Minterme überdeckt werden \rightarrow Konjunktion der Terme
 - \rightarrow Überdeckungsfunktion: Konjunktion der Disjunktion der w_X für jeden Minterm
 - Überdeckungsfunktion wird anschließend vereinfacht

2. Quinesche Tabelle

Wie kommt man von der (vereinfachten) 2. Quineschen Tabelle zur Minimalform?

- Durch “scharfes Hinsehen”
- Oder systematisch:
 - Überdeckungsfunktion verwendet Variablen w_X
 - w_X gibt an, ob der Primimplikant X in der Minimalform vorkommt
 - Aufbau:
 - Für jeden Minterm gibt es eine oder mehrere überdeckende Primimplikanten, von denen ein beliebiger reicht → Disjunktion der w_X
 - Es müssen alle Minterme überdeckt werden → Konjunktion der Terme
 - → Überdeckungsfunktion: Konjunktion der Disjunktion der w_X für jeden Minterm
 - Überdeckungsfunktion wird anschließend vereinfacht

2. Quinesche Tabelle

Wie kommt man von der (vereinfachten) 2. Quineschen Tabelle zur Minimalform?

- Durch “scharfes Hinsehen”
- Oder systematisch:
 - Überdeckungsfunktion verwendet Variablen w_X
 - w_X gibt an, ob der Primimplikant X in der Minimalform vorkommt
 - Aufbau:
 - Für jeden Minterm gibt es eine oder mehrere überdeckende Primimplikanten, von denen ein beliebiger reicht → Disjunktion der w_X
 - Es müssen alle Minterme überdeckt werden → Konjunktion der Terme
 - → Überdeckungsfunktion: Konjunktion der Disjunktion der w_X für jeden Minterm
 - Überdeckungsfunktion wird anschließend vereinfacht

2. Quinesche Tabelle

Wie kommt man von der (vereinfachten) 2. Quineschen Tabelle zur Minimalform?

- Durch “scharfes Hinsehen”
- Oder systematisch:
 - Überdeckungsfunktion verwendet Variablen w_X
 - w_X gibt an, ob der Primimplikant X in der Minimalform vorkommt
 - Aufbau:
 - Für jeden Minterm gibt es eine oder mehrere überdeckende Primimplikanten, von denen ein beliebiger reicht → Disjunktion der w_X
 - Es müssen alle Minterme überdeckt werden → Konjunktion der Terme
 - → Überdeckungsfunktion: Konjunktion der Disjunktion der w_X für jeden Minterm
 - Überdeckungsfunktion wird anschließend vereinfacht

2. Quinesche Tabelle

Wie kommt man von der (vereinfachten) 2. Quineschen Tabelle zur Minimalform?

- Durch “scharfes Hinsehen”
- Oder systematisch:
 - Überdeckungsfunktion verwendet Variablen w_X
 - w_X gibt an, ob der Primimplikant X in der Minimalform vorkommt
 - Aufbau:
 - Für jeden Minterm gibt es eine oder mehrere überdeckende Primimplikanten, von denen ein beliebiger reicht → Disjunktion der w_X
 - Es müssen alle Minterme überdeckt werden → Konjunktion der Terme
 - → Überdeckungsfunktion: Konjunktion der Disjunktion der w_X für jeden Minterm
- Überdeckungsfunktion wird anschließend vereinfacht

2. Quinesche Tabelle

Wie kommt man von der (vereinfachten) 2. Quineschen Tabelle zur Minimalform?

- Durch “scharfes Hinsehen”
- Oder systematisch:
 - Überdeckungsfunktion verwendet Variablen w_X
 - w_X gibt an, ob der Primimplikant X in der Minimalform vorkommt
 - Aufbau:
 - Für jeden Minterm gibt es eine oder mehrere überdeckende Primimplikanten, von denen ein beliebiger reicht → Disjunktion der w_X
 - Es müssen alle Minterme überdeckt werden → Konjunktion der Terme
 - → Überdeckungsfunktion: Konjunktion der Disjunktion der w_X für jeden Minterm
 - Überdeckungsfunktion wird anschließend vereinfacht

- Alternative zur 1. Quineschen Tabelle (Bestimmung von Primtermen)
- Beruht auf der Bildung von Consensus-Würfeln im Würfelkalkül
- Consensus-Würfel von A und B:
 - Nur definiert, wenn A und B genau eine komplementär belegte Variable beinhalten
 - Die komplementär belegte Variable wird im Consensus-Würfel als “Don’t Care” festgelegt
 - Alle anderen Belegungen werden auf den “kleinsten gemeinsamen Nenner” von A und B gesetzt
 - Beispiel: 1, wenn A 1 und B “Don’t Care” ist
 - “Don’t Care” nur, wenn A und B “Don’t Care” sind

- Alternative zur 1. Quineschen Tabelle (Bestimmung von Primtermen)
- Beruht auf der Bildung von Consensus-Würfeln im Würfelkalkül
- Consensus-Würfel von A und B:
 - Nur definiert, wenn A und B genau eine komplementär belegte Variable beinhalten
 - Die komplementär belegte Variable wird im Consensus-Würfel als “Don’t Care” festgelegt
 - Alle anderen Belegungen werden auf den “kleinsten gemeinsamen Nenner” von A und B gesetzt
 - Beispiel: 1, wenn A 1 und B “Don’t Care” ist
 - “Don’t Care” nur, wenn A und B “Don’t Care” sind

- Alternative zur 1. Quineschen Tabelle (Bestimmung von Primtermen)
- Beruht auf der Bildung von Consensus-Würfeln im Würfelkalkül
- Consensus-Würfel von A und B:
 - Nur definiert, wenn A und B genau eine komplementär belegte Variable beinhalten
 - Die komplementär belegte Variable wird im Consensus-Würfel als “Don’t Care” festgelegt
 - Alle anderen Belegungen werden auf den “kleinsten gemeinsamen Nenner” von A und B gesetzt
 - Beispiel: 1, wenn A 1 und B “Don’t Care” ist
 - “Don’t Care” nur, wenn A und B “Don’t Care” sind

- Alternative zur 1. Quineschen Tabelle (Bestimmung von Primtermen)
- Beruht auf der Bildung von Consensus-Würfeln im Würfelkalkül
- Consensus-Würfel von A und B:
 - Nur definiert, wenn A und B genau eine komplementär belegte Variable beinhalten
 - Die komplementär belegte Variable wird im Consensus-Würfel als “Don’t Care” festgelegt
 - Alle anderen Belegungen werden auf den “kleinsten gemeinsamen Nenner” von A und B gesetzt
 - Beispiel: 1, wenn A 1 und B “Don’t Care” ist
 - “Don’t Care” nur, wenn A und B “Don’t Care” sind

- Alternative zur 1. Quineschen Tabelle (Bestimmung von Primtermen)
- Beruht auf der Bildung von Consensus-Würfeln im Würfelkalkül
- Consensus-Würfel von A und B:
 - Nur definiert, wenn A und B genau eine komplementär belegte Variable beinhalten
 - Die komplementär belegte Variable wird im Consensus-Würfel als “Don’t Care” festgelegt
 - Alle anderen Belegungen werden auf den “kleinsten gemeinsamen Nenner” von A und B gesetzt
 - Beispiel: 1, wenn A 1 und B “Don’t Care” ist
 - “Don’t Care” nur, wenn A und B “Don’t Care” sind

- 1 Gebe bekannte Überdeckung der Funktion im Würfelkalkül an (z.B. die Minterme)
- 2 Vergleiche, beginnend mit dem 2. Würfel, mit jedem Würfel darüber und bilde alle möglichen Consensus-Würfel
 - Neu erzeugte Consensus-Würfel werden an das Ende der Tabelle angefügt
 - Würfel, die im Consensus-Würfel enthalten sind, werden gestrichen
- 3 Verfahren terminiert, wenn keine neuen Consensus-Würfel mehr erzeugt werden können

→ Nicht-gestrichene Würfel entsprechen den Primimplikanten

- 1 Gebe bekannte Überdeckung der Funktion im Würfelkalkül an (z.B. die Minterme)
- 2 Vergleiche, beginnend mit dem 2. Würfel, mit jedem Würfel darüber und bilde alle möglichen Consensus-Würfel
 - Neu erzeugte Consensus-Würfel werden an das Ende der Tabelle angefügt
 - Würfel, die im Consensus-Würfel enthalten sind, werden gestrichen
- 3 Verfahren terminiert, wenn keine neuen Consensus-Würfel mehr erzeugt werden können

→ Nicht-gestrichene Würfel entsprechen den Primimplikanten

- 1 Gebe bekannte Überdeckung der Funktion im Würfelkalkül an (z.B. die Minterme)
- 2 Vergleiche, beginnend mit dem 2. Würfel, mit jedem Würfel darüber und bilde alle möglichen Consensus-Würfel
 - Neu erzeugte Consensus-Würfel werden an das Ende der Tabelle angefügt
 - Würfel, die im Consensus-Würfel enthalten sind, werden gestrichen
- 3 Verfahren terminiert, wenn keine neuen Consensus-Würfel mehr erzeugt werden können

→ Nicht-gestrichene Würfel entsprechen den Primimplikanten

- 1 Gebe bekannte Überdeckung der Funktion im Würfelkalkül an (z.B. die Minterme)
- 2 Vergleiche, beginnend mit dem 2. Würfel, mit jedem Würfel darüber und bilde alle möglichen Consensus-Würfel
 - Neu erzeugte Consensus-Würfel werden an das Ende der Tabelle angefügt
 - Würfel, die im Consensus-Würfel enthalten sind, werden gestrichen
- 3 Verfahren terminiert, wenn keine neuen Consensus-Würfel mehr erzeugt werden können

→ Nicht-gestrichene Würfel entsprechen den Primimplikanten

Eine unvollständig definierte Schaltfunktion $y = f(e, d, c, b, a)$ sei durch ihre Eins- und Don't-Care-Stellen (Abkürzung d) gegeben:

$$y = \text{MINt}(12, 13, 14, 15, 29, 30) \vee d(17, 18)$$

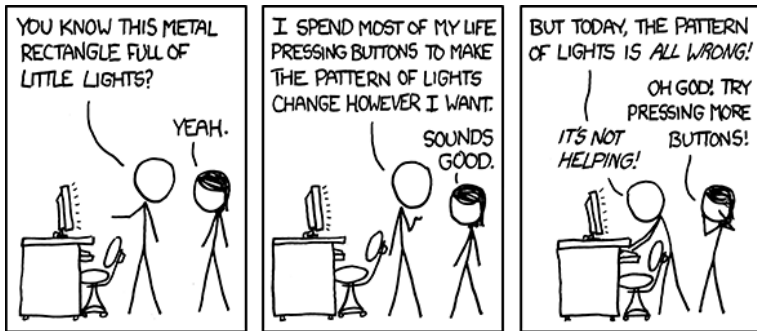
Bestimmen Sie alle Primimplikanten der Funktion $f(e, d, c, b, a)$ mit Hilfe des Quine-McCluskey-Verfahrens. Geben Sie eine disjunktive Minimalform von y an.

Übungsaufgabe 2

Eine vollständig definierte Schaltfunktion $y = f(d, c, b, a)$ ist gegeben durch die folgende Gleichung:

$$y = \text{MAXt}(0, 3, 6, 11, 13, 15)$$

Bestimmen Sie alle Primimplikanten der Funktion f mit Hilfe des Consensus-Verfahrens. Wählen Sie hierzu eine geeignete Anfangsüberdeckung aus.



Quelle: <http://xkcd.com/722/>