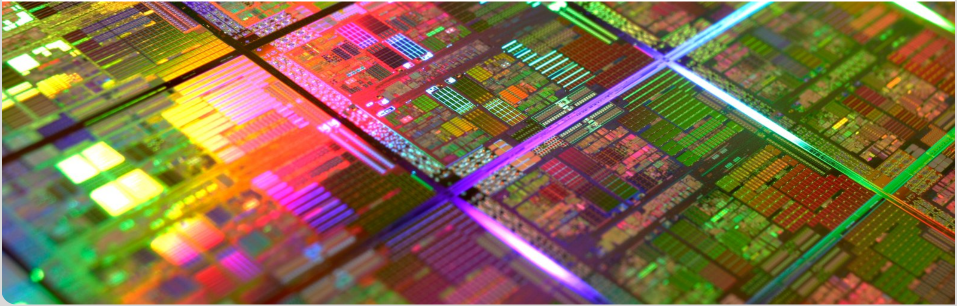
Karlsruher Institut für Technologie

DuE-Tutorien 17 und 18

Tutorien zur Vorlesung “Digitaltechnik und Entwurfsverfahren”

Christian A. Mandery

TUTORIENWOCHE 4 AM 25.11.2011



Heute

- Würfelkalkül
- Shannonscher Entwicklungssatz
- NAND und NOR
- Übungsaufgaben

Würfelkalkül

- Angabe eines Würfels ist die Angabe einer Variablenbelegung, wobei neben “0” und “1” auch “-” (“Don’t Care”) erlaubt ist
- Jeder Würfel repräsentiert einen entsprechenden Produktterm (Konjunktion von Literalen)
- Beispiele:
  - $f(c, b, a) = c \wedge \overline{b} \wedge a \leftrightarrow$ Würfel (1, 0, 1)
  - $f(c, b, a) = \overline{c} \wedge a \leftrightarrow$ Würfel (0, -, 1)
  - $f(c, b, a) = 1 \leftrightarrow$ Würfel (-, -, -)
- Ein Würfel mit n “Don’t Cares” überdeckt 2^n Variablenbelegungen (einfache Kombinatorik)

Würfelkalkül

- Angabe eines Würfels ist die Angabe einer Variablenbelegung, wobei neben “0” und “1” auch “-” (“Don’t Care”) erlaubt ist
- Jeder Würfel repräsentiert einen entsprechenden Produktterm (Konjunktion von Literalen)
- Beispiele:
  - $f(c, b, a) = c \wedge \overline{b} \wedge a \leftrightarrow$ Würfel (1, 0, 1)
  - $f(c, b, a) = \overline{c} \wedge a \leftrightarrow$ Würfel (0, -, 1)
  - $f(c, b, a) = 1 \leftrightarrow$ Würfel (-, -, -)
- Ein Würfel mit n “Don’t Cares” überdeckt 2^n Variablenbelegungen (einfache Kombinatorik)

Würfelkalkül

- Angabe eines Würfels ist die Angabe einer Variablenbelegung, wobei neben “0” und “1” auch “-” (“Don’t Care”) erlaubt ist
- Jeder Würfel repräsentiert einen entsprechenden Produktterm (Konjunktion von Literalen)
- Beispiele:
  - $f(c, b, a) = c \wedge \overline{b} \wedge a \leftrightarrow$ Würfel (1, 0, 1)
  - $f(c, b, a) = \overline{c} \wedge a \leftrightarrow$ Würfel (0, -, 1)
  - $f(c, b, a) = 1 \leftrightarrow$ Würfel (-, -, -)
- Ein Würfel mit n “Don’t Cares” überdeckt 2^n Variablenbelegungen (einfache Kombinatorik)

Veranschaulichung

- Name “Würfelkalkül” wegen der grafischen Veranschaulichung des Raums der möglichen Variablenbelegungen
  - Zwei Variablen: 2D-Würfel = Quadrat (4 mgl. Variablenbelegungen)
  - Drei Variablen: 3D-Würfel (8 mgl. Variablenbelegungen)
  - k Variablen: Hyperwürfel (2^k mgl. Variablenbelegungen)

Überdeckung

- Würfel A überdeckt B, wenn für alle Variablen i gilt:
  - $A_i = B_i$ oder
  - $A_i =$ “-” (“Don’t Care”)
- Interpretation: Würfel A enthält alle Variablenbelegungen, die in Würfel B enthalten sind (und weitere, falls $A \neq B$)

Überdeckung

- Würfel A überdeckt B, wenn für alle Variablen i gilt:
  - $A_i = B_i$ oder
  - $A_i =$ "-" ("Don't Care")
- Interpretation: Würfel A enthält alle Variablenbelegungen, die in Würfel B enthalten sind (und weitere, falls $A \neq B$)

Schnittmenge zweier Würfel

- Wird später für die Bildung von Consensus-Würfeln für das Consensus-Verfahren benötigt
- Nur definiert, wenn sich die Würfel nicht widersprechen, also gilt $\nexists i : (A_i = 1 \wedge B_i = 0) \vee (A_i = 0 \wedge B_i = 1)$
- Mögliche Fälle dann bei der Schnittmenge:
  - $A_i = 1$ oder $B_i = 1$: $\rightarrow 1$
  - $A_i = 0$ oder $B_i = 0$: $\rightarrow 0$
  - $A_i =$ "-" und $B_i =$ "-": $\rightarrow$ "-" ("Don't Care")

Schnittmenge zweier Würfel

- Wird später für die Bildung von Consensus-Würfeln für das Consensus-Verfahren benötigt
- Nur definiert, wenn sich die Würfel nicht widersprechen, also gilt $\nexists i : (A_i = 1 \wedge B_i = 0) \vee (A_i = 0 \wedge B_i = 1)$
- Mögliche Fälle dann bei der Schnittmenge:
  - $A_i = 1$ oder $B_i = 1$: $\rightarrow 1$
  - $A_i = 0$ oder $B_i = 0$: $\rightarrow 0$
  - $A_i =$ "-" und $B_i =$ "-": $\rightarrow$ "-" ("Don't Care")

Shannonscher Entwicklungssatz

Karlsruher Institut für Technologie

- Erlaubt es, jede beliebige Funktion schaltalgebraisch in die DNF oder KNF zu überführen
- Disjunktive Regel:
  $f(x_n, ...x_1) =$
  $(x_i \wedge f(x_n, ..., x_{i+1}, 1, x_{i-1}, ..., x_1)) \vee (\overline{x_i} \wedge f(x_n, ..., x_{i+1}, 0, x_{i-1}, ..., x_1))$
- Konjunktive Regel:
  $f(x_n, ...x_1) =$
  $(x_i \vee f(x_n, ..., x_{i+1}, 0, x_{i-1}, ..., x_1)) \wedge (\overline{x_i} \vee f(x_n, ..., x_{i+1}, 1, x_{i-1}, ..., x_1))$
- Enge Verbindung zu Multiplexern (kommen noch)

Shannonscher Entwicklungssatz

- Erlaubt es, jede beliebige Funktion schaltalgebraisch in die DNF oder KNF zu überführen
- Disjunktive Regel:
  $f(x_n, ...x_1) =$
  $(x_i \wedge f(x_n, ..., x_{i+1}, 1, x_{i-1}, ..., x_1)) \vee (\overline{x_i} \wedge f(x_n, ..., x_{i+1}, 0, x_{i-1}, ..., x_1))$
- Konjunktive Regel:
  $f(x_n, ...x_1) =$
  $(x_i \vee f(x_n, ..., x_{i+1}, 0, x_{i-1}, ..., x_1)) \wedge (\overline{x_i} \vee f(x_n, ..., x_{i+1}, 1, x_{i-1}, ..., x_1))$
- Enge Verbindung zu Multiplexern (kommen noch)

Shannonscher Entwicklungssatz

- Erlaubt es, jede beliebige Funktion schaltalgebraisch in die DNF oder KNF zu überführen
- Disjunktive Regel:
  $f(x_n, ...x_1) =$
  $(x_i \wedge f(x_n, ..., x_{i+1}, 1, x_{i-1}, ..., x_1)) \vee (\overline{x_i} \wedge f(x_n, ..., x_{i+1}, 0, x_{i-1}, ..., x_1))$
- Konjunktive Regel:
  $f(x_n, ...x_1) =$
  $(x_i \vee f(x_n, ..., x_{i+1}, 0, x_{i-1}, ..., x_1)) \wedge (\overline{x_i} \vee f(x_n, ..., x_{i+1}, 1, x_{i-1}, ..., x_1))$
- Enge Verbindung zu Multiplexern (kommen noch)

Shannonscher Entwicklungssatz

- Erlaubt es, jede beliebige Funktion schaltalgebraisch in die DNF oder KNF zu überführen
- Disjunktive Regel:
  $f(x_n, ...x_1) =$
  $(x_i \wedge f(x_n, ..., x_{i+1}, 1, x_{i-1}, ..., x_1)) \vee (\overline{x_i} \wedge f(x_n, ..., x_{i+1}, 0, x_{i-1}, ..., x_1))$
- Konjunktive Regel:
  $f(x_n, ...x_1) =$
  $(x_i \vee f(x_n, ..., x_{i+1}, 0, x_{i-1}, ..., x_1)) \wedge (\overline{x_i} \vee f(x_n, ..., x_{i+1}, 1, x_{i-1}, ..., x_1))$
- Enge Verbindung zu Multiplexern (kommen noch)

NAND und NOR

- NAND bildet ohne zusätzliche Operatoren ein vollständiges Operatorensystem (NOR auch)
- Schreibweise für n-stelliges NAND: $NAND_n(x_1, ..., x_n)$
  - $NAND_n(x_1, ..., x_n) = \overline{x_1 \wedge ... \wedge x_n}$
  - Nicht verwechseln mit $x_1 \overline{\wedge} ... \overline{\wedge} x_n$
- NOR analog wegen Dualitätsprinzip

NAND und NOR

- NAND bildet ohne zusätzliche Operatoren ein vollständiges Operatorensystem (NOR auch)
- Schreibweise für n-stelliges NAND: $NAND_n(x_1, ..., x_n)$
  - $NAND_n(x_1, ..., x_n) = \overline{x_1 \wedge ... \wedge x_n}$
  - Nicht verwechseln mit $x_1 \overline{\wedge} ... \overline{\wedge} x_n$
- NOR analog wegen Dualitätsprinzip

NAND und NOR

- NAND bildet ohne zusätzliche Operatoren ein vollständiges Operatorensystem (NOR auch)
- Schreibweise für n-stelliges NAND: $NAND_n(x_1, ..., x_n)$
  - $NAND_n(x_1, ..., x_n) = \overline{x_1 \wedge ... \wedge x_n}$
  - Nicht verwechseln mit $x_1 \overline{\wedge} ... \overline{\wedge} x_n$
- NOR analog wegen Dualitätsprinzip

NAND-/NOR-Umwandlung

- Fall “disjunktive Form zu NAND-Form” bzw. “konjunktive Form zu NOR-Form”
  1. Doppelte Negation
  2. Anwendung des Gesetzes von DeMorgan
- Fall “disjunktive Form zu NOR-Form” bzw. “konjunktive Form zu NAND-Form”
  1. Funktion negieren (ab jetzt rechnet man also mit $\overline{f}$)
  2. Alle Konjunktionen bzw. Disjunktionen doppelt negieren
  3. Anwendung des Gesetzes von DeMorgan
  4. f ergibt sich als $\overline{f} \overline{\vee} \overline{f}$ bzw. $\overline{f} \overline{\wedge} \overline{f}$

NAND-/NOR-Umwandlung

- Fall “disjunktive Form zu NAND-Form” bzw. “konjunktive Form zu NOR-Form”
  1. Doppelte Negation
  2. Anwendung des Gesetzes von DeMorgan
- Fall “disjunktive Form zu NOR-Form” bzw. “konjunktive Form zu NAND-Form”
  1. Funktion negieren (ab jetzt rechnet man also mit $\overline{f}$)
  2. Alle Konjunktionen bzw. Disjunktionen doppelt negieren
  3. Anwendung des Gesetzes von DeMorgan
  4. f ergibt sich als $\overline{f} \mathbin{\overline{\vee}} \overline{f}$ bzw. $\overline{f} \mathbin{\overline{\wedge}} \overline{f}$

Übungsaufgabe 1

Gegeben sei die boolesche Funktion $f(c, b, a) = MINt(1, 2, 3, 6, 7)$.

1. Stellen Sie die Funktionstabelle der Funktionen $f(c, b, a)$ und $\overline{f}(c, b, a)$ (Komplement von f) auf.
2. Geben Sie die konjunktive Normalform (KNF) der Funktionen f und $\overline{f}$ an.
3. Geben Sie die disjunktive Normalform (DNF) von $\overline{f}$ an.
4. Vereinfachen Sie die Ausdrücke der DNF und KNF von f mit Hilfe der Regeln der Booleschen Algebra. Die resultierenden Ausdrücke sollen so wenig Literale wie möglich enthalten.
5. Geben Sie Würfelüberdeckungen an, durch die f und $\overline{f}$ beschrieben werden.

Übungsaufgabe 1

Gegeben sei die boolesche Funktion $f(c, b, a) = MINt(1, 2, 3, 6, 7)$.

1. Stellen Sie die Funktionstabelle der Funktionen $f(c, b, a)$ und $\overline{f}(c, b, a)$ (Komplement von f) auf.
2. Geben Sie die konjunktive Normalform (KNF) der Funktionen f und $\overline{f}$ an.
3. Geben Sie die disjunktive Normalform (DNF) von $\overline{f}$ an.
4. Vereinfachen Sie die Ausdrücke der DNF und KNF von f mit Hilfe der Regeln der Booleschen Algebra. Die resultierenden Ausdrücke sollen so wenig Literale wie möglich enthalten.
5. Geben Sie Würfelüberdeckungen an, durch die f und $\overline{f}$ beschrieben werden.

Übungsaufgabe 1

Gegeben sei die boolesche Funktion $f(c,b,a) = MINt(1,2,3,6,7)$.

1. Stellen Sie die Funktionstabelle der Funktionen $f(c,b,a)$ und $\overline{f}(c,b,a)$ (Komplement von f) auf.
2. Geben Sie die konjunktive Normalform (KNF) der Funktionen f und $\overline{f}$ an.
3. Geben Sie die disjunktive Normalform (DNF) von $\overline{f}$ an.
4. Vereinfachen Sie die Ausdrücke der DNF und KNF von f mit Hilfe der Regeln der Booleschen Algebra. Die resultierenden Ausdrücke sollen so wenig Literale wie möglich enthalten.
5. Geben Sie Würfelüberdeckungen an, durch die f und $\overline{f}$ beschrieben werden.

Übungsaufgabe 1

Gegeben sei die boolesche Funktion $f(c, b, a) = MINt(1, 2, 3, 6, 7)$.

1. Stellen Sie die Funktionstabelle der Funktionen $f(c, b, a)$ und $\overline{f}(c, b, a)$ (Komplement von f) auf.
2. Geben Sie die konjunktive Normalform (KNF) der Funktionen f und $\overline{f}$ an.
3. Geben Sie die disjunktive Normalform (DNF) von $\overline{f}$ an.
4. Vereinfachen Sie die Ausdrücke der DNF und KNF von f mit Hilfe der Regeln der Booleschen Algebra. Die resultierenden Ausdrücke sollen so wenig Literale wie möglich enthalten.
5. Geben Sie Würfelüberdeckungen an, durch die f und $\overline{f}$ beschrieben werden.

Übungsaufgabe 1

Gegeben sei die boolesche Funktion $f(c, b, a) = MINt(1, 2, 3, 6, 7)$.

1. Stellen Sie die Funktionstabelle der Funktionen $f(c, b, a)$ und $\overline{f}(c, b, a)$ (Komplement von f) auf.
2. Geben Sie die konjunktive Normalform (KNF) der Funktionen f und $\overline{f}$ an.
3. Geben Sie die disjunktive Normalform (DNF) von $\overline{f}$ an.
4. Vereinfachen Sie die Ausdrücke der DNF und KNF von f mit Hilfe der Regeln der Booleschen Algebra. Die resultierenden Ausdrücke sollen so wenig Literale wie möglich enthalten.
5. Geben Sie Würfelüberdeckungen an, durch die f und $\overline{f}$ beschrieben werden.

Übungsaufgabe 2

Vereinfachen Sie die folgenden booleschen Ausdrücke:

1. $(b \vee \overline{a}) \wedge (c \vee \overline{a})$
2. $\overline{c}\overline{b}a \vee \overline{c}b\overline{a} \vee c\overline{b}(e\overline{a}) \vee cb(e\overline{a} \vee \overline{e}d)$
3. $\overline{\overline{((\overline{c} \vee \overline{b}) \wedge (\overline{b} \vee \overline{a})) \vee (c \wedge \overline{a})}}$

Übungsaufgabe 2

Vereinfachen Sie die folgenden booleschen Ausdrücke:

1. $(b \vee \overline{a}) \wedge (c \vee \overline{a})$
2. $\overline{c}\overline{b}a \vee \overline{c}b\overline{a} \vee c\overline{b}(e\overline{a}) \vee cb(e\overline{a} \vee \overline{e}d)$
3. $\overline{\overline{((\overline{c} \vee \overline{b}) \wedge (\overline{b} \vee \overline{a})) \vee (c \wedge \overline{a})}}$

Übungsaufgabe 2

Vereinfachen Sie die folgenden booleschen Ausdrücke:

1. $(b \vee \overline{a}) \wedge (c \vee \overline{a})$
2. $\overline{c}\overline{b}a \vee \overline{c}b\overline{a} \vee c\overline{b}(e\overline{a}) \vee cb(e\overline{a} \vee \overline{e}d)$
3. $\overline{\overline{((\overline{c} \vee \overline{b}) \wedge (\overline{b} \vee \overline{a})) \vee (c \wedge \overline{a})}}$

Übungsaufgabe 3

a_i	b_i	c_{in}	s_i	c_{out}
0	0	0	0	0
0	0	1	1	0
0	1	0	1	0
0	1	1	0	1
1	0	0	1	0
1	0	1	0	1
1	1	0	0	1
1	1	1	1	1

1. Geben Sie die disjunktive Normalform der Schaltfunktion s_i an.
2. Geben Sie die konjunktive Normalform der Schaltfunktion c_{out} an.
3. Zeigen sie schaltalgebraisch, dass $s_i = (a_i \nleftrightarrow b_i) \nleftrightarrow c_{in}$ gilt.
4. (Bonus) In welchem Bauteil der DT werden s_i und c_{out} eingesetzt?

Übungsaufgabe 3

a_i	b_i	c_{in}	s_i	c_{out}
0	0	0	0	0
0	0	1	1	0
0	1	0	1	0
0	1	1	0	1
1	0	0	1	0
1	0	1	0	1
1	1	0	0	1
1	1	1	1	1

1. Geben Sie die disjunktive Normalform der Schaltfunktion s_i an.
2. Geben Sie die konjunktive Normalform der Schaltfunktion c_{out} an.
3. Zeigen sie schaltalgebraisch, dass $s_i = (a_i \nleftrightarrow b_i) \nleftrightarrow c_{in}$ gilt.
4. (Bonus) In welchem Bauteil der DT werden s_i und c_{out} eingesetzt?

Übungsaufgabe 3

a_i	b_i	c_{in}	s_i	c_{out}
0	0	0	0	0
0	0	1	1	0
0	1	0	1	0
0	1	1	0	1
1	0	0	1	0
1	0	1	0	1
1	1	0	0	1
1	1	1	1	1

1. Geben Sie die disjunktive Normalform der Schaltfunktion s_i an.
2. Geben Sie die konjunktive Normalform der Schaltfunktion c_{out} an.
3. Zeigen sie schaltalgebraisch, dass $s_i = (a_i \nleftrightarrow b_i) \nleftrightarrow c_{in}$ gilt.
4. (Bonus) In welchem Bauteil der DT werden s_i und c_{out} eingesetzt?

Übungsaufgabe 3

Karlsruher Institut für Technologie

a_i	b_i	c_{in}	s_i	c_{out}
0	0	0	0	0
0	0	1	1	0
0	1	0	1	0
0	1	1	0	1
1	0	0	1	0
1	0	1	0	1
1	1	0	0	1
1	1	1	1	1

1. Geben Sie die disjunktive Normalform der Schaltfunktion s_i an.
2. Geben Sie die konjunktive Normalform der Schaltfunktion c_{out} an.
3. Zeigen sie schaltalgebraisch, dass $s_i = (a_i \nleftrightarrow b_i) \nleftrightarrow c_{in}$ gilt.
4. (Bonus) In welchem Bauteil der DT werden s_i und c_{out} eingesetzt?

Übungsaufgabe 4

Geben Sie die folgenden Schaltfunktionen sowohl in $NAND_k$- als auch in NOR_k-Form an. Die Variablen stehen sowohl bejaht als auch negiert zur Verfügung.

1. $c \wedge (a \not\leftrightarrow b) \wedge \overline{d}$
2. $(c \leftrightarrow b) \overline{\wedge} a$
3. $(a \vee \overline{b} \wedge (b \vee \overline{c})) \wedge (\overline{a} \vee \overline{b}))$
4. $\overline{b}\overline{a} \vee cba \vee edc$

Übungsaufgabe 4

Geben Sie die folgenden Schaltfunktionen sowohl in $NAND_k$- als auch in NOR_k-Form an. Die Variablen stehen sowohl bejaht als auch negiert zur Verfügung.

1. $c \wedge (a \not\leftrightarrow b) \wedge \overline{d}$
2. $(c \leftrightarrow b) \overline{\wedge} a$
3. $(a \vee \overline{b} \wedge (b \vee \overline{c})) \wedge (\overline{a} \vee \overline{b}))$
4. $\overline{b}\overline{a} \vee cba \vee edc$

Übungsaufgabe 4

Geben Sie die folgenden Schaltfunktionen sowohl in $NAND_k$- als auch in NOR_k-Form an. Die Variablen stehen sowohl bejaht als auch negiert zur Verfügung.

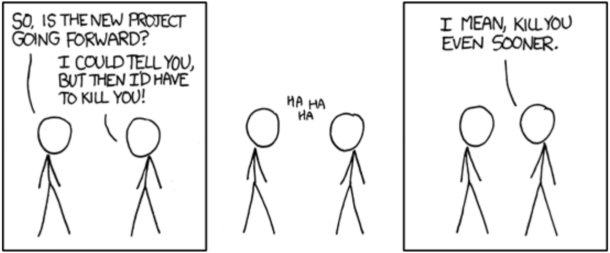
1. $c \wedge (a \not\leftrightarrow b) \wedge \overline{d}$
2. $(c \leftrightarrow b) \overline{\wedge} a$
3. $(a \vee \overline{b} \wedge (b \vee \overline{c})) \wedge (\overline{a} \vee \overline{b}))$
4. $\overline{b}\overline{a} \vee cba \vee edc$

Übungsaufgabe 4

Geben Sie die folgenden Schaltfunktionen sowohl in $NAND_k$- als auch in NOR_k-Form an. Die Variablen stehen sowohl bejaht als auch negiert zur Verfügung.

1. $c \wedge (a \nleftrightarrow b) \wedge \overline{d}$
2. $(c \leftrightarrow b) \overline{\wedge} a$
3. $(a \vee \overline{b} \wedge (b \vee \overline{c})) \wedge (\overline{a} \vee \overline{b}))$
4. $\overline{b}\overline{a} \vee cba \vee edc$

Fertig!



Quelle: http://xkcd.com/707/