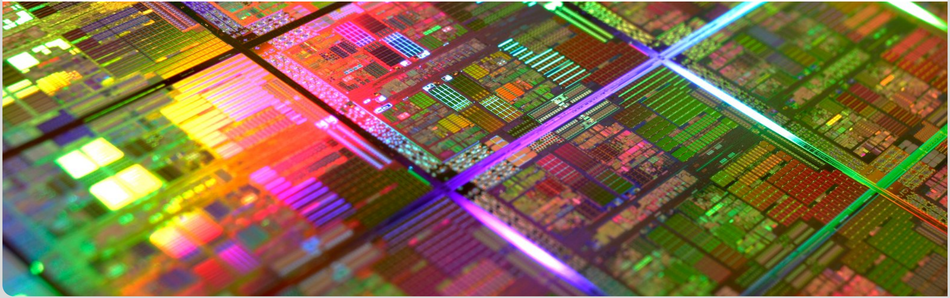
Karlsruher Institut für Technologie

DuE-Tutorien 16 und 17

Tutorien zur Vorlesung “Digitaltechnik und Entwurfsverfahren”

Tutorienwoche 2 am 12.11.2010



Heute

- BCD-Code
- Gray-Code
- Aiken-Code
- Stibitz-Code
- Gleitzomma-Darstellung
- IEEE 754
- Übungsaufgaben

BCD-Code: Einführung

- **B**inary **C**oded **D**ecimal
- Je vier Bits werden zu einer dezimalen Stelle zusammengefasst und als Tetrade bezeichnet
- Die hexadezimalen Ziffern, die keine dezimale Ziffer darstellen (A-F) werden als Pseudotetraden bezeichnet und sind ungültig
- Kommadarstellung z.B. durch Festkomma-Darstellung
- Beispiel: $1001010100010111_{BCD} = 9517_{10}$

BCD-Code: Codetabelle

Wert	Codewort	Wert	Codewort
0	0000	5	0101
1	0001	6	0110
2	0010	7	0111
3	0011	8	1000
4	0100	9	1001

- Vor- und Nachteile des BCD-Code?

BCD-Code: Codetabelle

Wert	Codewort	Wert	Codewort
0	0000	5	0101
1	0001	6	0110
2	0010	7	0111
3	0011	8	1000
4	0100	9	1001

- Vor- und Nachteile des BCD-Code?

Gray-Code

- Code, bei dem sich benachbarte Codewörter nur in einer Ziffer unterscheiden
- Auch das niedrigste und höchste Codewort sind als benachbart zu betrachten
- Gray-Code für 3 Bit:

Wert	Codewort	Wert	Codewort
0	000	4	110
1	001	5	111
2	011	6	101
3	010	7	100

- Vor- und Nachteile?

Gray-Code

- Code, bei dem sich benachbarte Codewörter nur in einer Ziffer unterscheiden
- Auch das niedrigste und höchste Codewort sind als benachbart zu betrachten
- Gray-Code für 3 Bit:

Wert	Codewort	Wert	Codewort
0	000	4	110
1	001	5	111
2	011	6	101
3	010	7	100

- Vor- und Nachteile?

Aiken-Code

- Ähnlich dem BCD-Code, aber mit den Wertigkeiten 2-4-2-1
- Pseudotetraden sind hier 5 bis A
  - Aiken(n) = not Aiken(9 - n)
  - Berechnung von 9 - n (Neunerkomplement) ist sehr einfach
  - Was nützt einem das?
- Aiken-Code für 4 Bit:

Wert	Codewort	Wert	Codewort
0	0000	5	1011
1	0001	6	1100
2	0010	7	1101
3	0011	8	1110
4	0100	9	1111

- Vor- und Nachteile?

Aiken-Code

- Ähnlich dem BCD-Code, aber mit den Wertigkeiten 2-4-2-1
- Pseudotetraden sind hier 5 bis A
  - Aiken(n) = not Aiken(9 - n)
  - Berechnung von 9 - n (Neunerkomplement) ist sehr einfach
  - Was nützt einem das?
- Aiken-Code für 4 Bit:

Wert	Codewort	Wert	Codewort
0	0000	5	1011
1	0001	6	1100
2	0010	7	1101
3	0011	8	1110
4	0100	9	1111

- Vor- und Nachteile?

Stibitz-Code

- Entspricht dem BCD-Code, wenn man zu jeder Ziffer 3 addiert
  - Pseudotetraden sind 0 bis 2 und D bis F
  - Bereich der gültigen Tetraden ist “zentriert”
  - Daher wieder einfache Berechnung von Neunerkomplement durch Negation (wie Aiken-Code)
- Codetabelle:

Wert	Codewort	Wert	Codewort
0	0011	5	1000
1	0100	6	1001
2	0101	7	1010
3	0110	8	1011
4	0111	9	1100

- Vor- und Nachteile?

Stibitz-Code

- Entspricht dem BCD-Code, wenn man zu jeder Ziffer 3 addiert
  - Pseudotetraden sind 0 bis 2 und D bis F
  - Bereich der gültigen Tetraden ist “zentriert”
  - Daher wieder einfache Berechnung von Neunerkomplement durch Negation (wie Aiken-Code)
- Codetabelle:

Wert	Codewort	Wert	Codewort
0	0011	5	1000
1	0100	6	1001
2	0101	7	1010
3	0110	8	1011
4	0111	9	1100

- Vor- und Nachteile?

Bisher: Festkomma-Darstellung

- Das Komma wird an eine feste Stelle verfügt, mit der entsprechenden Wertigkeit der Stellen
- Beispiel für Format mit drei Nachkommazahlen:

Stelle	Wertigkeit
0. Bit (LSB)	1/8
1. Bit	1/4
2. Bit	1/2
3. Bit	1
4. Bit	2
...	...

Probleme der Festkomma-Darstellung

- Festkomma-Darstellung hat Vorteile ...
  - Assoziativgesetz gilt
  - Keine Auslöschung
- ... aber auch Nachteile:
  - Sehr große und sehr kleine Zahlen nicht darstellbar
  - Differenz von aufeinanderfolgenden Zahlen ist über den ganzen Zahlenbereich gleich groß
- $\longrightarrow$ Gleitkommazahlen

Gleitkomma-Darstellung

- Eine Gleitkommazahl wird durch drei Werte beschrieben:
  - **Vorzeichen-Bit**
  - **Mantisse**: Ziffern der Gleitkommazahl (als Nachkommastellen)
  - **Exponent**: Verschiebung der Mantisse, um die Zahl zu erhalten
- Der Exponent wird in der Offset-Darstellung (Exzess-Code) gespeichert und dann als Charakteristik bezeichnet
- Berechnung des Werts der Gleitkommazahl:
  - $Zahl = (-1)^{Vorzeichen-Bit} * (0, Mantisse) * b^{Exponent}$
  - Achtung: Bei normierter Darstellung steht vor dem Komma eine Eins!
  - Die Basis b ist meistens 2

Gleitkomma-Darstellung

- Eine Gleitkommazahl wird durch drei Werte beschrieben:
  - **Vorzeichen-Bit**
  - **Mantisse**: Ziffern der Gleitkommazahl (als Nachkommastellen)
  - **Exponent**: Verschiebung der Mantisse, um die Zahl zu erhalten
- Der Exponent wird in der Offset-Darstellung (Exzess-Code) gespeichert und dann als Charakteristik bezeichnet
- Berechnung des Werts der Gleitkommazahl:
  - $Zahl = (-1)^{Vorzeichen-Bit} * (0, Mantisse) * b^{Exponent}$
  - Achtung: Bei normierter Darstellung steht vor dem Komma eine Eins!
  - Die Basis b ist meistens 2

Gleitkomma-Darstellung

- Eine Gleitkommazahl wird durch drei Werte beschrieben:
  - **Vorzeichen-Bit**
  - **Mantisse**: Ziffern der Gleitkommazahl (als Nachkommastellen)
  - **Exponent**: Verschiebung der Mantisse, um die Zahl zu erhalten
- Der Exponent wird in der Offset-Darstellung (Exzess-Code) gespeichert und dann als Charakteristik bezeichnet
- Berechnung des Werts der Gleitkommazahl:
  - $Zahl = (-1)^{Vorzeichen-Bit} * (0, Mantisse) * b^{Exponent}$
  - Achtung: Bei normierter Darstellung steht vor dem Komma eine Eins!
  - Die Basis b ist meistens 2

Normalisierte Gleitkommazahlen

- Jeder Binärzahl außer der Null enthält irgendwo eine Eins
- Wenn die Zahl nicht zu klein ist, kann man die erste Eins mit dem Exponent immer vor das Komma schieben
- → Normalisierte Darstellung
- Durch eine implizite Eins statt Null vor dem Komma gewinnt man ein Bit Genauigkeit
- Aber: Man braucht dann eine spezielle Darstellung für die Null (und ggf. sehr kleine Zahlen)

Normalisierte Gleitkommazahlen

- Jeder Binärzahl außer der Null enthält irgendwo eine Eins
- Wenn die Zahl nicht zu klein ist, kann man die erste Eins mit dem Exponent immer vor das Komma schieben
- $\rightarrow$ Normalisierte Darstellung
- Durch eine implizite Eins statt Null vor dem Komma gewinnt man ein Bit Genauigkeit
- Aber: Man braucht dann eine spezielle Darstellung für die Null (und ggf. sehr kleine Zahlen)

Aufbau von Gleitkommazahlen

- Um ein einheitliches Format zu verwenden, legt man fest, welche Bits der Gleitkommazahl Vorzeichen, Mantisse und Exponent spezifizieren
- Eine solche Festlegung macht der IEEE 754-Standard (“IEEE Standard for Binary Floating-Point Arithmetic for Microprocessor Systems”)

Spezielle Gleitkommazahlen

- Bestimmte Gleitkommazahlen, mit denen man eine Gleitkomma-Darstellung charakterisieren kann, haben einen speziellen Wert.
  - **Maxreal**: Größte normalisierte Zahl
  - **Minreal**: Kleinste normalisierte Zahl
  - **Smallreal**: Kleinste Zahl x mit $1 + x \neq 1$

IEEE 754: Formate

- Single Precision (“float“):
  - 32 Bit = 1 Bit Vorzeichen + 8 Bit Charakteristik + 23 Bit Mantisse
  - Offset für Charakteristik: 127
- Double Precision (”double”):
  - 64 Bit = 1 Bit Vorzeichen + 11 Bit Charakteristik + 52 Bit Mantisse
  - Offset für Charakteristik: 1023

IEEE 754: Formate

- Single Precision (“float“):
  - 32 Bit = 1 Bit Vorzeichen + 8 Bit Charakteristik + 23 Bit Mantisse
  - Offset für Charakteristik: 127
- Double Precision (”double”):
  - 64 Bit = 1 Bit Vorzeichen + 11 Bit Charakteristik + 52 Bit Mantisse
  - Offset für Charakteristik: 1023

IEEE 754: Charakteristik

- $1 \leq \textit{Charakteristik} \leq 254$:
  - $\textit{Exponent} = \textit{Charakteristik} - 127$
  - Normalisierung
- $\textit{Charakteristik} = 0$:
  - Kleinstmöglicher Exponent (-126)
  - Keine Normalisierung (nur so ist die Null darstellbar!)
- $\textit{Charakteristik} = 255$:
  - $\textit{Mantisse} = 0$: Überlauf (“unendlich”)
  - $\textit{Mantisse} \neq 0$: NaN (“Not a Number”)

IEEE 754: Charakteristik

- $1 \leq \mathit{Charakteristik} \leq 254$:
  - $\mathit{Exponent} = \mathit{Charakteristik} - 127$
  - Normalisierung
- $\mathit{Charakteristik} = 0$:
  - Kleinstmöglicher Exponent (-126)
  - Keine Normalisierung (nur so ist die Null darstellbar!)
- $\mathit{Charakteristik} = 255$:
  - $\mathit{Mantisse} = 0$: Überlauf (“unendlich”)
  - $\mathit{Mantisse} \neq 0$: NaN (“Not a Number”)

IEEE 754: Charakteristik

- $1 \leq \textit{Charakteristik} \leq 254$:
  - $\textit{Exponent} = \textit{Charakteristik} - 127$
  - Normalisierung
- $\textit{Charakteristik} = 0$:
  - Kleinstmöglicher Exponent (-126)
  - Keine Normalisierung (nur so ist die Null darstellbar!)
- $\textit{Charakteristik} = 255$:
  - $\textit{Mantisse} = 0$: Überlauf (“unendlich”)
  - $\textit{Mantisse} \neq 0$: NaN (“Not a Number”)

Übungsaufgabe 1

Vervollständigen Sie folgende Tabelle:

Dezimalzahl	BCD-Kode	AIKEN-Kode	STIBITZ-Kode
13,78			
	10010111,1001		
		1001,00011010	
			0110,01000111

Übungsaufgabe 2

Gegeben sei das folgende Maschinenformat für die Darstellung von Gleitkommazahlen:
Bit 31: Vorzeichen, Bits 30 - 24: Charakteristik, Bits 23 - 0: Mantisse

- Vorzeichen: VZ = 0 $\rightarrow$ positive Zahl, VZ = 1 $\rightarrow$ negative Zahl
- $\mathit{Charakteristik} = \mathit{Exponent} + 40_{16}$
- Basis 16

Die Mantisse liegt im Zahlenbereich $16^{-1} \leq \mathit{Mantisse} \leq (1 - 16^{-6})$.

1. Geben Sie in obigem Format die größte und die kleinste negative Zahl in normalisierter und nicht-normalisierter Maschinendarstellung an.
2. Was sind die Vor- und Nachteile, wenn man statt der Basis 16 die Basis 2 verwendet?
3. Was ändert sich, wenn man (im Fall der Basis 2) ein Bit der Mantisse aufgibt zugunsten eines Bits für die Charakterisik?

Übungsaufgabe 2

Gegeben sei das folgende Maschinenformat für die Darstellung von Gleitkommazahlen:
Bit 31: Vorzeichen, Bits 30 - 24: Charakteristik, Bits 23 - 0: Mantisse

- Vorzeichen: VZ = 0 $\rightarrow$ positive Zahl, VZ = 1 $\rightarrow$ negative Zahl
- $\mathit{Charakteristik} = \mathit{Exponent} + 40_{16}$
- Basis 16

Die Mantisse liegt im Zahlenbereich $16^{-1} \leq \mathit{Mantisse} \leq (1 - 16^{-6})$.

1. Geben Sie in obigem Format die größte und die kleinste negative Zahl in normalisierter und nicht-normalisierter Maschinendarstellung an.
2. Was sind die Vor- und Nachteile, wenn man statt der Basis 16 die Basis 2 verwendet?
3. Was ändert sich, wenn man (im Fall der Basis 2) ein Bit der Mantisse aufgibt zugunsten eines Bits für die Charakterisik?

Übungsaufgabe 2

Gegeben sei das folgende Maschinenformat für die Darstellung von Gleitkommazahlen:
Bit 31: Vorzeichen, Bits 30 - 24: Charakteristik, Bits 23 - 0: Mantisse

- Vorzeichen: VZ = 0 $\rightarrow$ positive Zahl, VZ = 1 $\rightarrow$ negative Zahl
- $\mathit{Charakteristik} = \mathit{Exponent} + 40_{16}$
- Basis 16

Die Mantisse liegt im Zahlenbereich $16^{-1} \leq \mathit{Mantisse} \leq (1 - 16^{-6})$.

1. Geben Sie in obigem Format die größte und die kleinste negative Zahl in normalisierter und nicht-normalisierter Maschinendarstellung an.
2. Was sind die Vor- und Nachteile, wenn man statt der Basis 16 die Basis 2 verwendet?
3. Was ändert sich, wenn man (im Fall der Basis 2) ein Bit der Mantisse aufgibt zugunsten eines Bits für die Charakterisik?

Übungsaufgabe 2

Gegeben sei das folgende Maschinenformat für die Darstellung von Gleitkommazahlen:
Bit 31: Vorzeichen, Bits 30 - 24: Charakteristik, Bits 23 - 0: Mantisse

- Vorzeichen: VZ = 0 $\rightarrow$ positive Zahl, VZ = 1 $\rightarrow$ negative Zahl
- $\mathit{Charakteristik} = \mathit{Exponent} + 40_{16}$
- Basis 16

Die Mantisse liegt im Zahlenbereich $16^{-1} \leq \mathit{Mantisse} \leq (1 - 16^{-6})$.

1. Geben Sie in obigem Format die größte und die kleinste negative Zahl in normalisierter und nicht-normalisierter Maschinendarstellung an.
2. Was sind die Vor- und Nachteile, wenn man statt der Basis 16 die Basis 2 verwendet?
3. Was ändert sich, wenn man (im Fall der Basis 2) ein Bit der Mantisse aufgibt zugunsten eines Bits für die Charakterisik?

Übungsaufgabe 3

Wandeln Sie die Dezimalzahl 21 in das 32-Bit-Format des IEEE-754-Standard um. Stellen Sie die Gleitkommazahl als hexadezimale Zahl dar.

Verbleibende Aufgaben der Übung

(nicht enthalten auf diesem Foliensatz, siehe Folien Ü1-40 ff.)

Fertig!

Quelle: http://xkcd.com/138/